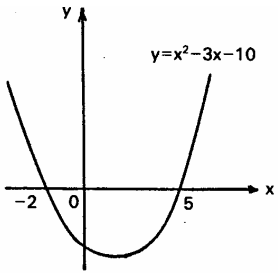
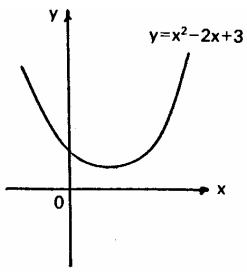
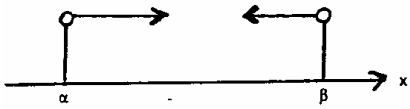
单元 **6**：不等式

特定目标：

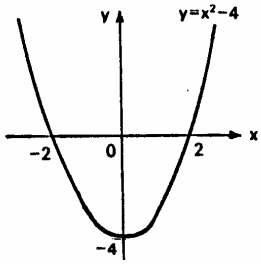
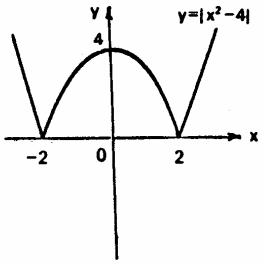
1. 理解不等式的基本法则。
2. 解一元一次不等式。
3. 解一元二次不等式。
4. 解 $\frac{ax+b}{cx+d} \geq k$ 形式的不等式。
5. 解含绝对值的一次和二次不等式。
6. 证明简单的绝对不等式。

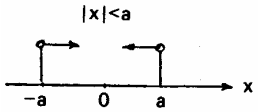
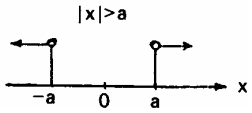
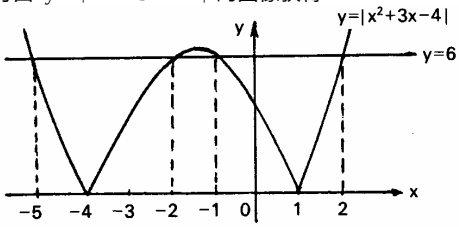
内容	时间分配	教学建议
6.1 不等式的基本法则	1*	教师宜强调若 a–b 是一个正数，则 a > b，而且它的逆定理亦成立。利用这个事实，可导出下列的基本法则。 对实数 a、b、c： (1) 若 a > b，且 b > c，则 a > c。 (2) 则 a > b，则 a + c > b + c。 (3) 则 a > b，则 (a) ac > bc 若 c > 0。 (b) ac < bc 若 c < 0。 (c) ac = bc 若 c = 0。
6.2 一元一次不等式	1*	利用基本法则来证明不等式的简单问题亦须介绍。 教师宜提示学生解线性不等式的方法和解线性方程的方法很类似。唯一的分别是当一条不等式被乘或除以一个负数时，则不等号须反向。

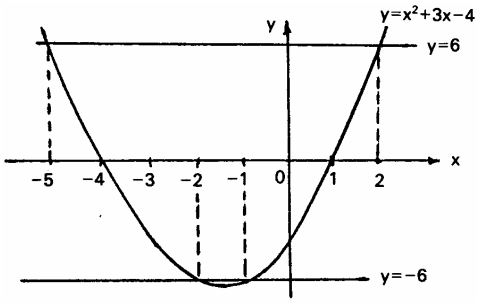
内容	时间分配	教学建议
6.3 一元二次不等式	1*+2	对学生来说，将不等式的解描绘出来是一个很好的做法。在解复不等式时，将各解描画在同一数在线对解题特别有帮助。下列是两个典型的例子： *例一* 解复不等式： $7x-3<5x+1$ 及 $\frac{x}{2}<x+\frac{1}{2}$ *例二* 解复不等式： $\frac{2(x+1)}{5}<\frac{3(1-x)}{7}$ 或 $2-\frac{4-5x}{4}<\frac{7x+1}{8}$ 图解法、因式分解法和列表法等都是解二次不等式的方法。 学生曾在初中学习二次方程的图解法。因此，他们可用图像来解二次不等式。例如：   由图像中，不难看出不等式 $x^2-3x-10>0$ 的解是 $x<-2$ 或 $x>5$，

内 容	时间分配	教 学 建 议
		$x^2-3x-10\le 0$ 的解是 $-2\le x\le 5$， $x^2-2x+3>0$ 的解是所有实数，及 $x^2-2x+3<0$ 无实数解。 解二次不等式的方法与解二次方程的方法很相似。先将各项重新排列，令右方零，然后在可能情况下将左方的二次因式分解。所得的不等式可用下列事例求解： (1) 若 $ab>0$，则 $\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$。 (2) 若 $ab<0$，则 $\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$。 牢记下列两个结果有助解题，设 $\alpha>\beta$ ： (1) 若 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$，则解是 $\alpha<x<\beta$ 且图像是  (2) 若 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$，则解是 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$ 且图像是

内 容	时间分配	教 学 建 议
		须给予学生做适量的习作以掌握此技巧。 当二次式不能被因式分解时，教师须提示学生将该式转换成 $(x+c)^2+d>0$ 或 $\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)>0$ 等的形式。 若使用列表法解 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 等的不等式时。学生要作表逐一列出当 $x<\alpha$，$\alpha<x<\beta$ 及 $x>\beta$ 时 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 的符号。 下列例子可予介绍： *例一* 解不等式 $3x^2>7x-1$。 *例二* 证明对所有实数 x，函数 $y=\frac{x-1}{x^2+3}$ 的值一定在 $-\frac{1}{2}$ 至 $\frac{1}{6}$ 的范围内。 *例三* 分别对下列各情况解 $x>\frac{2}{x}+1$ ： (a) $x>0$ (b) $x<0$ 由此求不等式 $x>\frac{2}{x}+1$ 的全解。
6.4 形式如 $\frac{ax+b}{cx+d}\ge k$ 的不等式	2	必须强调：若将一个形式如 $\frac{ax+b}{cx+d}\ge k$ 的不等式乘以一个含未知数的因式，则因式是正或负的情况必须分别考虑。例如，解 $\frac{x+2}{x-4}\ge 1$ 或 $\frac{x+2}{x-4}-1\ge 0$ 时，$x>4$ 和 $x<4$ 的而种情况必须分别考虑。(学生须留意 $x\ne 4$)。不过，较简便的方法是将不等式乘以分母的平方，因而消去分母，变成 $(x+2)(x-4)\ge(x-4)^2$。事实上，这形式的不等式可用列表法求解。

内 容	时间分配	教 学 建 议
6.5 绝对值	1	*例* 解不等式 $\frac{2x+5}{4x-3} \geq 1$ 必须清楚说明定义：$\lvert x \rvert = \begin{cases} x & 若\ x \geq 0 \\ -x & 若\ x < 0 \end{cases}$，亦须介绍 $y = \lvert x \rvert$ 的图像。 教师须提示学生在描绘含绝对值的简单函数时，必须首先将绝对值符号移去。例如，将 $y = \lvert x^2 - 4 \rvert$ 的绝对值符号移去后，便得如图 1 的图像。因为在 $y = \lvert x^2 - 4 \rvert$ 中，y 是非负数的，故此所求的图像将如图 2 所示。  图 1  图 2
6.6 含绝对值的不等式	3	这类型的不等式可用图解法或代数法求解。学生会发觉若将 $\lvert x \rvert$ 看成在数在线 x 与原点的距离，则有助理解 $\lvert x \rvert$ 的意义。依这想法，$\lvert x - y \rvert$ 将代表在数在线 x 和 y 两点阅的距离。 下列的事实值得牢记：

内 容	时间分配	教 学 建 议
		(1) 若 $\lvert x \rvert < a$，则 $-a < x < a$。 (2) 若 $\lvert x \rvert > a$，则 $x < -a$ 或 $x > a$。 下列两幅图表可用作说明   *例* 解不等式 $\lvert x^2 + 3x - 4 \rvert \geq 6$ 这不等式的解可由 $y = \lvert x^2 + 3x - 4 \rvert$ 的图像获得  另外，不等式的解亦可由 $y = x^2 + 3x - 4$ 的图像求得。

内 容	时间分配	教 学 建 议
6.7 绝对不等式	1	 从代数观点，这不等式等价于 $x^2+3x-4\le -6$ 或 $x^2+3x-4\ge 6$，简化后可得解： $x\le -5$，$-2\le x\le -1$ 或 $x\ge 2$ 亦可介绍像 $\big\lvert\lvert x+1\rvert-\lvert x-1\rvert\big\rvert<1$ 的较复杂例子。在处理这类不等式时，可考虑 x 在不同区间的情况，然后将绝对值符号移去。教师必须清楚说明如何确定 x 的不同区间。对每一区间，不等式都分别求解，然后将各解综合起来求全解。 学生会发觉将个别的解画在同一数在线对求全解极有帮助。 教师须提示学生：对所有实数 x，$x^2\ge 0$。 教师亦可导出下列不等式： $a^2+b^2\ge 2ab$ 及 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ 其中 $a>0$，$b>0$

内 容	时间分配	教 学 建 议
	3* + 9	一个常用以证明 $x>y$ 的方法是证明不等式 $x-y>0$ 能够成立。 用以上两个事实，教师可和学生讨论一些简单的绝对不等式，例如： $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$