单元 3：二次方程及二次函数

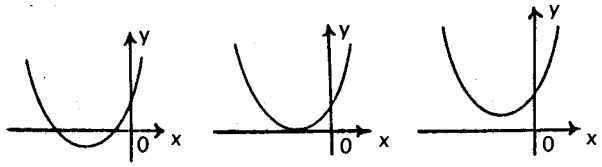
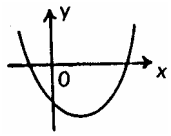
特定目标：

1. 学习以配方法及求根公式解二次方程的技巧。
2. 确定二次方程的根的性质。
3. 求二次函数的极大值和极小值。

内 容	时间分配	教 学 建 议
3.1 二次方程的解法	8 *	教师应先利用例子如 $x^2-8x+9=0$，后再利用 x^2 系数不等于 1 的其它例子如 $3x^2-6x-14=0$ 去介绍配方法解二次方程。当学生已熟习这技巧后，教师可尝试利用同一方法去推导出二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 求根公式： $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ 。 学生应没有运用求根公式的困难，并应探究二次方程的两根α、β的和及积与其系数 a、 b、 c 的关系。学生应牢记 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ 与 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 这两个关系，然后再应用于其它计算方面，如求 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 、$\alpha^2+\beta^2$ 和 $\alpha^3+\beta^3$ 的值、及依据已知条件作出二次方程的练习。 教师应讨论由一线性方程及一二次方程组成的联立方程的解法，代数方法与图解法也要同时介绍。图解法最能有效地解释为何二次方程会有两个相异根或是两个相同根、甚至无实根。教师应强调图解法带出的几何意义。
3.2 根的性质	4	教师应引导学生去发现二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的性质是由它的判别式 $D=b^2-4ac$ 所确定。学生应能清楚分辨二次方程的根是否实数、还是复数；是相同、还是相异；是有理数、还是无理数。 非实数 例如：二次方程 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$，其中 a、b、c 是相异整数，它的判别式是 $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=(a+c-2b)^2$。这可引出方程的两根是有理数。同样，学生应看出那两根在 $a+c-2b=0$ 的情况下是相同的。

内 容	时间分配	教 学 建 议
3.3 二次函数	4	教师应给予学生有关的练习。以下是一个例子： *例* 求 m 值的范围，使得以下方程的根为实数。 $y=m(x+2)$ $y^2=8x$ 在这例子中，学生应能找出 $m^2x^2+(4m^2-8)x+4m^2=0$ 的方程、及 $(4m^2-8)^2-16m^4\geq 0$ 这条件。 学生应能运用配方法把代数式 ax^2+bx+c 写成 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 的形式。教师应引导学生去确定二次函数 ax^2+bx+c 的极大值（若 a<0）或极小值（若 a>0）为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，而 x 的对应值为 $-\frac{b}{2a}$。学生也应知道直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 是二次函数 ax^2+bx+c 的对称轴。 教师可与学生讨论二次函数 ax^2+bx+c 的图像，同时引导学生总结以下不同的情况：

a	b	c
>0	>0	>0
	=0	=0
<0	<0	<0

内 容	时间分配	教 学 建 议
		在以上十八个情况下，可能会有一个或三个情况对应于一个或三个判别式的可能数值。例如，当 a＞0、b＞0、c＞0，下面是三个可能情况：  但当 a＞0、b＜0、c＜0，那时只有如下的一个可能性：  $b^2-4ac>0$ 教师应鼓励学生于解二次方程或二次不等式时，将有关的二次函数作出简单的草图。 有关二次函数的练习，可包括以下例子。 *例一* 求以下代数式的极大值或极小值。 (*a*) x^2-8x+9 (*b*) $6+6x-x^2$ (*c*) $\frac{1}{x^2-6x+11}$

内 容	时间分配	教 学 建 议
		例二 求 m 和 n 的值，得使以下数式恒为正数。 (*a*) $3x^2+2x+m$ (*b*) nx^2-5x+4
	8* + 8	